مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱، ص ۱۲–۲۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.49875.2378

حل عددی معادلات انتشار کسری مرتبه توزیعی با استفاده از توابع کلاهی مربعی

افروز عباسی [(۱)] و سمیه نعمتی [(۱)] [۱]

[(۱)] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی نیا

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۰۵

چکیده: در این پژوهش، از توابع کلاهی مربعی و خواص آنها برای حل دسته‌ای از معادلات انتشار مرتبه توزیعی استفاده می‌شود. مشتق کسری در مفهوم کاپوتو در نظر گرفته می‌شود. به‌منظور به‌دست آوردن جواب عددی، بعد از اعمال انتگرال مرتبه دوم مکانی روی دو طرف معادله و به‌کارگیری قاعده انتگرال‌گیری گاوس–لژاندر، مسئله مورد نظر به یک معادله انتگرال–دیفرانسیل کسری زمانی چندعبارتی تبدیل می‌شود. در ادامه، با معرفی تقریبی از مشتق مرتبه اول زمانی برای تابع مجهول، مشتقات مراتب مختلف تابع با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال ریمان–لیوویل و خواص توابع کلاهی مربعی تقریب زده می‌شوند. با جایگذاری این تقریب‌ها و به‌کارگیری شرایط اولیه و مرزی، دستگاهی از معادلات جبری حاصل می‌شود. سپس، خطای تقریب بررسی می‌شود. در آخر، ارائه مثال‌های عددی کارآمدی و دقت روش پیشنهادی را مورد ارزیابی قرار می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: معادله انتشار مرتبه توزیعی، توابع کلاهی مربعی، مشتق کاپوتو، انتگرال ریمان–لیوویل، ماتریس عملیاتی.

رده‌بندی ریاضی: 60J60; 26A33

۱ مقدمه

با استفاده از مفاهیم حسابان کسری ابزارهای ریاضی پیشرفته‌ای برای مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده و فرایندهای طبیعی فراهم شده است [۱۲، ۳۰] ، زیرا عملگرهای مرتبه کسری غیرموضعی بوده و با در نظر گرفتن رفتار تابع در یک بازه زمانی پیوسته، می‌توانند اثر حافظه و خواص ارثی پدیده‌ها را نشان دهند [۳۶]. قابلیت این مدل‌ها برای توصیف پدیده‌های پویا نظیر فرآیند انتقال و انتشار [۹] مورد توجه پژوهشگران بوده و تاکنون روش‌های عددی و تحلیلی مختلفی برای حل مسائل مرتبه کسری ارائه شده است. به‌طور مثال، در [۴] از روش تائو و چندجمله‌ای‌های چبیشف برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده شده است. در [۳۳] روش گالرکین و توابع پایه‌ای اسپلاین به‌کار گرفته شده و [۴۳] یک روش تقریبی با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر ارائه داده است. در [۳۸] از روش سری توانی باقیمانده استفاده شده و در [۳۴] یک روش ترکیبی ارائه شده است. همچنین، روش نیمه‌گسسته‌سازی بر مبنای درون‌یابی مربعی در [۳۵] برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی پیشنهاد شده است.

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(A. Abbasi) a.abbasi05@umail.umz.ac.ir, (S. Nemati) s.nemati@umz.ac.ir

گسترش مفاهیم حسابان کسری و تعمیم آن در قالب مفاهیم حسابان مرتبه توزیعی ابزاری قدرتمند برای توصیف پدیده‌ها در حوزه‌های مختلف علوم پایه، مهندسی و سایر رشته‌های کاربردی فراهم نموده است [۲۹، ۳۱]. از جنبه نظری و مطالعاتی تعریف عملگرهای مشتق و انتگرال مرتبه توزیعی در نقش واسطه بین عملگرهای مرتبه کسری و عملگرهای مرتبه صحیح، منجر به ظهور معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری توزیعی شده است؛ و پژوهشگران تاکنون روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی را برای حل این دسته از معادلات دیفرانسیل ارائه نموده و یا مطالعاتی در خصوص وجود و یکتا بودن جواب به همراه مباحث تحلیل خطا انجام داده‌اند. به‌عنوان مثال، در [۲] یک روش طیفی بر پایه موجک‌های چبیشف کسری و در [۲۵] یک روش عددی بر پایه توابع ژاکوبی برای حل این گونه از معادلات ارائه شده است. در [۲۸] یک الگوریتم محاسباتی بر پایه موجک‌های لژاندر و در [۴۰] یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری مرتبه توزیعی پیشنهاد شده است. در [۴۱] یک ماتریس عملیاتی بر پایه چندجمله‌ای‌های لژاندر معرفی شده و در [۲۳] روش طیفی گالرکین برای حل معادلات دو بعدی ارائه شده است. وجود جواب معادله دیفرانسیل مرتبه توزیعی و یکتا بودن آن در [۸] و [۲۰] مورد بحث قرار گرفته و در [۱۸] وجود جواب یکتا در یک فضای باناخ بررسی شده است. رویکرد [۳۲] برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه کسری توزیعی شامل دو مرحله است که در گام نخست با استفاده از قاعده انتگرال‌گیری گاوس–لژاندر، تقریبی از انتگرال کسری مرتبه توزیعی به‌صورت مجموع دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ساخته شده و در گام دوم یک روش عددی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های برنولی برای حل تقریب حاصل از مرحله قبل به‌کار گرفته شده است. در [۲۶] نیز پس از گسسته‌سازی مسئله اولیه و تقلیل مرتبه توزیعی به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، با استفاده از چندجمله‌ای‌های درون‌یاب لاگرانژ جواب تقریبی مسئله محاسبه شده است. شرایط وجود جواب یکتا و همگرایی روش گاوس–لژاندر نیز در [۴۸] مورد بحث قرار گرفته است.

یکی از انواع معادلات دیفرانسیل که توسط بسیاری از پژوهشگران مورد مطالعه قرار گرفته است، معادله انتشار خطی و غیرخطی است. معادله انتشار مرتبه کسری زمانی با استفاده از مفاهیم حسابان کسری، الگوی رفتار تکاملی یک متغیر، مانند گرما یا جرم ذرات را در بازه‌های زمانی توصیف می‌کند. معادلات انتشار مرتبه کسری در مقایسه با معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح توصیف دقیق‌تری از پدیده مشاهده شده ارائه می‌دهند [۲۴] و به‌دلیل کاربردهایشان در فیزیک و مهندسی، به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۱۷، ۳۹]. مدل‌های دیفرانسیل کسری توزیعی، به‌دلیل دارا بودن ویژگی‌های غیرموضعی، در توصیف سیستم‌های دینامیکی پیچیده، مؤثرتر از مدل‌های مرتبه کسری و کلاسیک‌اند [۴۶]. این دسته از معادلات دیفرانسیل در توصیف پویایی فرآیندهای فیزیکی، شیمیایی و زیستی به‌کار گرفته شده و در مدل‌سازی فرآیند انتشار و پدیده‌های مرتبط با آن نظیر فرآیند زیرانتشار و ابرانتشار به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱، ۲۷]. علاوه بر آن، معادله انتشار می‌تواند در مدل‌سازی ریاضی بسیاری از پدیده‌های اقتصادی، پزشکی و مهندسی ظاهر شود و تاکنون روش‌های عددی گوناگونی برای حل معادله انتشار مرتبه کسری توزیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای نمونه، وجود و نحو محاسبه جواب در [۷] مورد بحث قرار گرفته است؛ در [۵] به تجزیه و تحلیل معادلات انتشار کسری مرتبه توزیعی پرداخته شده و برای حل آن در [۱۶] روش تفاضل متناهی به‌کار گرفته شده است. روش‌های طیفی گاوس– لوباتو و گاوس– لوباتو– لژاندر نیز برای حل معادلات انتشار کسری–فضایی مرتبه توزیعی بررسی شده است [۳]. از توابع پایه‌ای شعاعی [۱]، چندجمله‌ای‌های لژاندر [۱۵] و تبدیل لاپلاس [۶، ۱۹] نیز برای حل این دسته از معادلات استفاده شده است. در [۴۵]، روش تفاضل متناهی فشرده برای حل معادله دیفرانسیل انتشار کسری–فضایی استفاده شده است. ترکیب روش گسسته‌سازی تفاضل متناهی و چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم برای حل معادلات دیفرانسیل انتشار کسری–فضایی در [۴۷] ارائه شد. همچنین، اخیراً یک روش عناصر متناهی مرتبه بالا برای حل معادلات دیفرانسیل انتشار مرتبه توزیعی در [۴۲] پیشنهاد شده است.

در این پژوهش، به مطالعه دسته‌ای از معادلات انتشار کسری زمانی با مرتبه توزیعی می‌پردازیم. شکل کلی این معادلات به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\int_{0}^{1} w(\alpha) D_t^{\alpha} u(x,t)\, d\alpha + \rho u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad 0 < x < X, \ 0 < t \le T, \tag{۱.۱}$$

با شرط اولیه

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le X, \tag{۲.۱}$$

و شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(0,t) = \hat{u}_0(t), & 0 \le t \le T, \\ u(X,t) = \hat{u}_1(t), & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{۳.۱}$$

که در آن، $f(x,t)$، $u_0(x)$، $\hat{u}_0(t)$ و $\hat{u}_1(t)$ توابع معلوم و پیوسته هستند و $D_t^{\alpha} u$ به مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $0 < \alpha$ نسبت به متغیر t اشاره دارد. همچنین w تابع توزیع است که در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$w : [0,1] \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}, \qquad 0 < \int_{0}^{1} w(\alpha)\, d\alpha < \infty.$$

برای ارائه روش عددی، توابع کلاهی مربعی برای حل مسئله (۱.۱) -(۳.۱) مورد استفاده قرار می‌گیرند. این توابع دارای ساختار قطعه‌ای و محمل متناهی هستند که موجب ایجاد ماتریس‌های پراکنده در فرآیند گسسته‌سازی می‌شود. در نتیجه، برخلاف روش‌های طیفی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های چبیشف یا لژاندر که معمولاً منجر به ماتریس‌های پرهزینه می‌شوند، ماتریس عملیاتی ریمان-لیوویل متناظر با توابع کلاهی مربعی دارای ساختاری کم‌هزینه است. این ویژگی کاهش قابل توجهی در هزینه محاسباتی و حافظه مورد نیاز ایجاد می‌کند، به‌ویژه در معادلات دیفرانسیل مرتبه توزیعی که ارزیابی عملگر کسری برای مجموعه‌ای از مراتب مختلف انجام می‌شود. همچنین، ماهیت محلی توابع کلاهی مربعی آنها را نسبت به روش‌های مبتنی بر پایه‌های چندجمله‌ای، برای توصیف رفتارهای غیرهموار، تکینگی‌های ضعیف، و تغییرات موضعی که در بسیاری از مدل‌های کسری رخ می‌دهد، مناسب‌تر می‌سازد.

ساختار این پژوهش به شرح ذیل است: در بخش ۲، برخی تعاریف ضروری از حسابان کسری، توابع پایه‌ای کلاهی مربعی و خواص آنها یادآوری می‌شود. در بخش ۳، به معرفی روش عددی برای حل مسئله (۱.۱) -(۳.۱) پرداخته می‌شود. بخش ۴ به تحلیل خطا می‌پردازد. در بخش ۵، نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش روی مثال‌های عددی آورده شده و کارایی و دقت روش پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در آخر، نتیجه‌گیری در بخش ۶ بیان می‌شود.

۲ مفاهیم اساسی

در این بخش، مباحث مورد نیاز از حسابان کسری یادآوری می‌شود. سپس، به خانواده توابع کلاهی مربعی و خواص کاربردی آنها از جمله ماتریس عملیاتی توابع کلاهی پرداخته می‌شود.

۱.۲ مروری بر حسابان کسری

در حسابان کسری برای عملگرهای مشتق و انتگرال، تعاریف گوناگونی ارائه شده است [۱۳، ۴۹] که می‌توان خواص و کاربردهای متنوع آنها را در مراجع [۱۴، ۳۶] یافت. در اینجا، تعریف عملگرهای انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲. برای تابع $u(.)$ عملگر انتگرال‌گیری کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۴۹]:

$$I_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds, \quad t > 0,$$
$$I_t^0 u(t) = u(t),$$

که در آن $\Gamma(.)$ تابع گامای اویلر است.

تعریف ۲.۲. برای تابع $u(.)$، مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(s) ds, \qquad m-1 < \alpha < m.$$

تعریف ۳.۲. برای تابع دو متغیره $u(x,t)$ مشتق کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$ نسبت به متغیر t، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x,s)}{\partial s^m} ds, \qquad m-1 < \alpha \leq m.$$

برای $m \in \mathbb{N}$ و مقادیر αای که در بازه $(m-1, m]$ قرار دارند، می‌توان به روابط کاربردی بین مشتق کاپوتو و عملگر انتگرال‌گیری ریمان-لیوویل به شرح زیر اشاره کرد [۴۹]:

$$D_t^\alpha I_t^\alpha u(t) = u(t),$$

$$I_t^\alpha D_t^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad t > 0, \tag{۱.۲}$$

$$I_t^{\alpha-\beta} D_t^\alpha u(t) = D_t^\beta u(t) - \sum_{i=\lceil\beta\rceil}^{m-1} u^{(i)}(0) \frac{t^{i-\beta}}{\Gamma(i-\beta+1)}, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad t > 0, \tag{۲.۲}$$

که در آن، $\lceil . \rceil$ نشان‌دهنده تابع سقف است.

۲.۲ توابع کلاهی مربعی و خواص آنها

به‌منظور معرفی یک خانواده $(n+1)$ -تایی از توابع کلاهی مربعی، فرض می‌شود که به‌ازای عدد زوج n بازه $[0,S]$ به n زیربازه $[ih,(i+1)h]$، $i=0,1,\dots,n-1$، با طول مساوی $h=\dfrac{S}{n}$ تقسیم شود. توابع کلاهی مربعی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۷]:

$$\psi_{0,S}(s)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}(s-h)(s-2h), & 0\le s\le 2h,\\ 0, & \text{سایر مقادیر } s,\end{cases} \tag{۳.۲}$$

برای مقادیر فرد i که $1\le i\le n-1$،

$$\psi_{i,S}(s)=\begin{cases}\frac{-1}{h^2}(s-(i-1)h)(s-(i+1)h), & (i-1)h\le s\le (i+1)h,\\ 0, & \text{سایر مقادیر } s,\end{cases} \tag{۴.۲}$$

و نیز برای مقادیر زوج i که $2\le i\le n-2$،

$$\psi_{i,S}(s)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}(s-(i-1)h)(s-(i-2)h), & (i-2)h\le s\le ih,\\ \frac{1}{2h^2}(s-(i+1)h)(s-(i+2)h), & ih\le s\le (i+2)h,\\ 0, & \text{سایر مقادیر } s,\end{cases} \tag{۵.۲}$$

و آخرین عضو خانواده به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_{n,S}(s)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}(s-(S-h))(s-(S-2h)), & S-2h\le s\le S,\\ 0, & \text{سایر مقادیر } s.\end{cases} \tag{۶.۲}$$

خانواده توابع کلاهی مربعی (۳.۲)-(۶.۲) در فضای $L^2[0,S]$ مستقل خطی هستند و برای $s_j=jh$ داریم:

$$\psi_{i,S}(s_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{۷.۲}$$

همچنین،

$$\sum_{i=0}^{n}\psi_{i,S}(s)=1.$$

ازاین‌رو، برای هر تابع دلخواه y که عضو فضای $L^2[0,S]$ باشد و برای هر عدد زوج n، می‌توان تقریبی مبتنی بر یک ترکیب خطی از خانواده $(n+1)$- تایی توابع کلاهی مربعی به‌دست آورد:

$$y(s)\simeq y_n(s)=\sum_{i=0}^{n}y_i\psi_{i,S}(s)=Y^T\Psi_{n,S}(s),$$

که در آن، $\Psi_{n,S}(s)$ بردار $n+1$ -تایی توابع پایه‌ای به‌شکل زیر است

$$\Psi_{n,S}(s)=[\psi_{0,S}(s),\psi_{1,S}(s),\dots,\psi_{n,S}(s)]^T,$$

و Y بردار ضرایب است که به‌صورت زیر داده می‌شود

$$Y=[y_0,y_1,\dots,y_n]^T,$$

به‌طوری‌که، $y_j=y(s_j)$.

به‌طور مشابه، تابع دو متغیره $u(x,t) \in L^{۲}([۰,X]\times[۰,T])$ را می‌توان به‌صورت زیر تقریب زد:

$$u(x,t) \simeq u_{n_۱,n_۲}(x,t) = \sum_{i=۰}^{n_۱}\sum_{j=۰}^{n_۲} u_{i,j}\psi_{i,X}(x)\psi_{j,T}(t) = \Psi^T_{n_۱,X}(x)U\Psi_{n_۲,T}(t), \qquad (۸.۲)$$

که در آن، U ماتریس ضرایب با درایه‌های $u_{i,j} = u(x_i,t_j)$ است، به‌طوری‌که $x_i = \frac{iX}{n_۱}$ و $t_j = \frac{jT}{n_۲}$.

ماتریس عملیاتی مربوط به عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه α را با P^α_s نشان می‌دهیم. ابعاد این ماتریس $(n+۱)\times(n+۱)$ بوده و درایه‌های آن با اعمال عملگر I^α_s بر تابع پایه‌ای $\psi_{i,S}$ از بردار $\Psi_{n,S}$ به‌دست می‌آیند. این ماتریس به‌صورت زیر داده می‌شود [۳۷]:

$$P^\alpha_s = \frac{h^\alpha}{۲\Gamma(\alpha+۳)}\begin{bmatrix} ۰ & \beta_۱ & \beta_۲ & \beta_۳ & \beta_۴ & \dots & \beta_{n-۱} & \beta_n \\ ۰ & \eta_۰ & \eta_۱ & \eta_۲ & \eta_۳ & \dots & \eta_{n-۲} & \eta_{n-۱} \\ ۰ & \xi_{-۱} & \xi_۰ & \xi_۱ & \xi_۲ & \dots & \xi_{n-۳} & \xi_{n-۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \eta_۰ & \eta_۱ & \dots & \eta_{n-۴} & \eta_{n-۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \xi_{-۱} & \xi_۰ & \dots & \xi_{n-۵} & \xi_{n-۴} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & \eta_۰ & \eta_۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & \xi_{-۱} & \xi_۰ \end{bmatrix},$$

که در آن،

$$\begin{aligned}
&\beta_۱ = \alpha(۳+۲\alpha),\\
&\beta_i = i^{\alpha+۱}(۲i-۶-۳\alpha)+۲i^\alpha(۱+\alpha)(۲+\alpha)-(i-۲)^{\alpha+۱}(۲i-۲+\alpha), \quad i=۲,۳,\dots,n,\\
&\eta_۰ = ۴(۱+\alpha),\\
&\eta_i = ۴[(i-۱)^{\alpha+۱}(i+۱+\alpha)-(i+۱)^{\alpha+۱}(i-۱-\alpha)], \quad i=۱,۲,\dots,n-۱,\\
&\xi_{-۱} = -\alpha,\\
&\xi_۰ = ۲^{\alpha+۱}(۲-\alpha),\\
&\xi_۱ = ۳^{\alpha+۱}(۴-\alpha)-۶(۲+\alpha),\\
&\xi_i = (i+۲)^{\alpha+۱}(۲i+۲-\alpha)-۶i^{\alpha+۱}(۲+\alpha)-(i-۲)^{\alpha+۱}(۲i-۲+\alpha), \quad i=۲,۳,\dots,n-۲.
\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$I^\alpha_s\Psi_{n,S}(s) \simeq P^\alpha_s\Psi_{n,S}(s). \qquad (۹.۲)$$

بدیهی است استفاده از ماتریس عملیاتی P^α_s به‌دلیل وجود تعداد درایه‌های صفر زیاد، منجر به پردازش سریع‌تر و کاهش هزینه محاسبات می‌شود.

۳ روش عددی

برای تسهیل فرایند تقریب عددی، ابتدا دو انتگرال‌گیری پیاپی نسبت به متغیر مکانی اعمال می‌شود تا معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال-دیفرانسیل معادل تبدیل گردد. این تبدیل موجب می‌شود که شرایط اولیه و مرزی به‌طور مستقیم در معادله جدید وارد شوند و دیگر نیازی به اعمال جداگانه آنها در مرحله گسسته‌سازی نباشد. بنابراین، به‌منظور به‌دست آوردن جوابی تقریبی برای معادله (۱.۱)، ابتدا، عملگر $I^{۲}_x$ را روی طرفین این معادله اعمال می‌کنیم:

$$I^{۲}_x\left(\int_۰^۱ w(\alpha)D^\alpha_t u(x,t)d\alpha\right) + \rho\left[u(x,t)-u_x(۰,t)x-u(۰,t)\right] = \overline{f}(x,t). \qquad (۱.۳)$$

تابع $\overline{f}$ در سمت راست معادله بالا با دو بار انتگرال‌گیری نسبت به متغیر x از تابع f حاصل شده است؛ یعنی

$$\overline{f}(x,t)=\int_{0}^{x}\int_{0}^{z}f(s,t)dsdz.$$

حال قاعده انتگرال‌گیری گاوس–لژاندر را به‌کار می‌گیریم و در (۱.۳) عبارت انتگرالی مرتبه توزیعی را به شرح زیر تقریب می‌زنیم:

$$\int_{0}^{1}w(\alpha)D_t^{\alpha}u(x,t)d\alpha\simeq\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\omega_j w(\frac{1}{2}(\alpha_j+1))D_t^{\frac{1}{2}(\alpha_j+1)}u(x,t) \tag{۲.۳}$$

که در آن، α_j ها گره‌های انتگرال‌گیری گاوس–لژاندر و ω_j ها وزن‌های متناظر هستند [۱۰].
با جایگذاری (۲.۳) در (۱.۳) داریم:

$$I_x^2\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\omega_j w(\frac{1}{2}(\alpha_j+1))D_t^{\frac{1}{2}(\alpha_j+1)}u(x,t)\right)+\rho\left[u(x,t)-u_x(0,t)x-u(0,t)\right]=\overline{f}(x,t). \tag{۳.۳}$$

از آنجا که توابع کلاهی مربعی در نقاط گره‌ای مشتق‌پذیر نیستند، ابتدا تقریبی برای $u_t(x,t)$ در نظر گرفته و سپس با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال ریمان–لیوویل و خواص داده شده در (۱.۲) و (۲.۲)، تقریب‌هایی برای $u(x,t)$ و $D_t^{\alpha}u(x,t)$ معرفی می‌کنیم. این کار باعث می‌شود که شرط اولیه به‌طور طبیعی در معادله ظاهر شود. فرض می‌کنیم تقریب تابع $u_t(x,t)$ بر مبنای توابع پایه‌ای کلاهی مربعی به شرح زیر باشد:

$$u_t(x,t)\simeq\Psi_{n_1,X}^{T}(x)A\Psi_{n_2,T}(t), \tag{۴.۳}$$

که در آن، A ماتریس ضرایب و مجهول است. با استفاده از رابطه (۲.۲) داریم:

$$D_t^{\alpha}u(x,t)=I_t^{1-\alpha}D_t^{1}u(x,t).$$

اکنون، با توجه به (۴.۳) و (۹.۲) تقریبی از $D_t^{\alpha}u(x,t)$ به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$D_t^{\alpha}u(x,t)\simeq\Psi_{n_1,X}^{T}(x)AP_t^{1-\alpha}\Psi_{n_2,T}(t). \tag{۵.۳}$$

همچنین، با توجه به خاصیت (۱.۲) و با استفاده از شرط اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$u(x,t)\simeq\Psi_{n_1,X}^{T}(x)AP_t^{1}\Psi_{n_2,T}(t)+u_0(x). \tag{۶.۳}$$

با توجه به (۹.۲) و جایگذاری تقریب‌های معرفی شده در (۴.۳) و (۵.۳) در (۳.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\omega_j w(\frac{1}{2}(\alpha_j+1))\Psi_{n_1,X}^{T}(x)(P_x^2)^{T}AP_t^{\frac{1}{2}(1-\alpha_j)}\Psi_{n_2,T}(t)\\&\quad+\rho\left[u(x,t)-u_x(0,t)x-u(0,t)\right]=\Psi_{n_1,X}^{T}(x)\overline{F}\Psi_{n_2,T}(t),\end{aligned} \tag{۷.۳}$$

به‌طوری‌که $\overline{F}$ ماتریس ضرایب بسط تابع $\overline{f}(x,t)$ است.
با جایگذاری شرط اولیه (۲.۱) و شرایط مرزی (۳.۱) در رابطه (۷.۳) ، تقریبی از $u_x(0,t)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}u_x(0,t)\simeq&\frac{1}{2\rho x}\sum_{j=1}^{M}\omega_j w(\frac{1}{2}(\alpha_j+1))\Psi_{n_1,X}^{T}(x)(P_x^2)^{T}AP_t^{\frac{1}{2}(1-\alpha_j)}\Psi_{n_2,T}(t)\\&+\frac{1}{x}u(x,t)-\frac{1}{x}\hat{u}_0(t)-\frac{1}{\rho x}\Psi_{n_1,X}^{T}(x)\overline{F}\Psi_{n_2,T}(t).\end{aligned} \tag{۸.۳}$$

با قرار دادن $x = X$ در (۸.۳) ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u_x(\circ, t) \simeq \frac{۱}{۲\rho X} \sum_{j=۱}^{M} \omega_j w(\frac{۱}{۲}(\alpha_j + ۱)) \Psi^T_{n_۱,X}(X)(P^۲_x)^T A P_t^{\frac{۱}{۲}(۱-\alpha_j)} \Psi_{n_۲,T}(t) \\ + \frac{۱}{X}\left(\hat{u}_۱(t) - \hat{u}_\circ(t)\right) - \frac{۱}{\rho X} \Psi^T_{n_۱,X}(X) \overline{F} \Psi_{n_۲,T}(t). \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

اکنون، مقدار تقریبی $u_x(\circ, t)$ به‌دست آمده در (۹.۳) و تقریب (۶.۳) را در (۷.۳) جایگذاری می‌کنیم. بعد از ساده‌سازی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۲} \sum_{j=۱}^{M} \omega_j w(\frac{۱}{۲}(\alpha_j + ۱))(P^۲_x)^T A P_t^{\frac{۱}{۲}(۱-\alpha_j)} + \rho A P^۱_t + \rho U_\circ \\ - \frac{۱}{۲} \sum_{j=۱}^{M} \omega_j w(\frac{۱}{۲}(\alpha_j + ۱)) Q (P^۲_x)^T A P_t^{\frac{۱}{۲}(۱-\alpha_j)} - \rho \overline{U} + Q\overline{F} = \overline{F}, \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

که در آن از تقریب‌های زیر استفاده شده است:

$$\frac{x}{X} \Psi^T_{n_۱,X}(X) \simeq \Psi^T_{n_۱,X}(x) Q,$$

$$\frac{x}{X}\left(\hat{u}_۱(t) - \hat{u}_\circ(t)\right) \simeq \Psi^T_{n_۱,X}(x) \overline{U} \Psi_{n_۲,T}(t),$$

$$u_\circ(x) - \hat{u}_\circ(t) \simeq \Psi^T_{n_۱,X}(x) U_\circ \Psi_{n_۲,T}(t).$$

در آخر، با حل دستگاه معادلات (۱۰.۳) و محاسبه ماتریس ضرایب A، جواب تقریبی مسئله با توجه به رابطه (۶.۳) حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که دستگاه حاصل یک دستگاه معادلات خطی بر حسب درایه‌های مجهول ماتریس A است. با این وجود، در پیاده‌سازی روش، برای حل این دستگاه از دستور FindRoot در نرم‌افزار Mathematica استفاده شده است. این دستور بر اساس روش تکراری نیوتن برای حل دستگاه‌های غیرخطی عمل می‌کند. در این وضعیت، با در نظر گرفتن مقادیر اولیه صفر، تنها با یک تکرار جواب دستگاه حاصل می‌شود.

۴ تحلیل خطا

در این بخش، به بررسی مرتبه همگرایی بسط یک تابع دو متغیره با استفاده از توابع کلاهی مربعی می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $u(x,t) \in C^۳([\circ, X] \times [\circ, T])$، $h_۱ = \frac{X}{n_۱}$ و $h_۲ = \frac{T}{n_۲}$. همچنین، فرض کنید $u_{n_۱,n_۲}(x,t)$ معرفی شده در (۸.۲) تقریب تابع u با استفاده از توابع کلاهی مربعی باشد. آنگاه

$$|u(x,t) - u_{n_۱,n_۲}(x,t)| = O\left(h_۱^۳\right) + O\left(h_۲^۳\right).$$

اثبات. قرار می‌دهیم:

$$\Delta = [\circ, X] \times [\circ, T], \qquad \Delta_{i,j} = [x_i, x_{i+۲}] \times [t_j, t_{j+۲}], \quad i = \circ, \ldots, n_۱ - ۲, \ j = \circ, \ldots, n_۲ - ۲.$$

واضح است که $\Delta = \cup \Delta_{i,j}$. با توجه به خاصیت (۷.۲)، ملاحظه می‌شود که $u_{n_۱,n_۲}(x,t)$ روی $\Delta_{i,j}$ یک چندجمله‌ای از درجه دو است که $u(x,t)$ را در نقاط $(lh_۱, mh_۲)$ برای $l = i, i+۱, i+۲$ و $m = j, j+۱, j+۲$ درون‌یابی می‌کند. با استفاده از خطای درون‌یابی روی $\Delta_{i,j}$ داریم [۲۲]

$$\begin{aligned} u(x,t) - u_{n_۱,n_۲}(x,t) = & \frac{۱}{۶} \frac{\partial^۳ u(\zeta, t)}{\partial x^۳} \prod_{l=i}^{i+۲} (x - lh_۱) + \frac{۱}{۶} \frac{\partial^۳ u(x, \eta)}{\partial t^۳} \prod_{m=j}^{j+۲} (t - mh_۲) \\ & - \frac{۱}{۳۶} \frac{\partial^۶ u(\zeta', \eta')}{\partial x^۳ \partial t^۳} \prod_{l=i}^{i+۲} (x - lh_۱) \prod_{m=j}^{j+۲} (t - mh_۲), \end{aligned}$$

که در آن، $\zeta, \zeta' \in [x_i, x_{i+۲}]$ و $\eta, \eta' \in [t_j, t_{j+۲}]$. بنابراین

$$\begin{aligned}|u(x,t) - u_{n_۱,n_۲}(x,t)| \leq & \frac{۱}{۶} \max_{(x,t)\in\Delta_{i,j}} \left|\frac{\partial^۳ u(x,t)}{\partial x^۳}\right| \left|\prod_{l=i}^{i+۲}(x - lh_۱)\right| \\ & + \frac{۱}{۶} \max_{(x,t)\in\Delta_{i,j}} \left|\frac{\partial^۳ u(x,t)}{\partial t^۳}\right| \left|\prod_{m=j}^{j+۲}(t - mh_۲)\right| \\ & + \frac{۱}{۳۶} \max_{(x,t)\in\Delta_{i,j}} \left|\frac{\partial^۶ u(x,t)}{\partial x^۳ \partial t^۳}\right| \left|\prod_{l=i}^{i+۲}(x - lh_۱)\right| \left|\prod_{m=j}^{j+۲}(t - mh_۲)\right|.\end{aligned} \tag{۱.۴}$$

از آنجایی‌که $u \in C^۳(\Delta)$، ثابت‌های مثبت $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\max_{(x,t)\in\Delta_{i,j}} \left|\frac{\partial^۳ u(x,t)}{\partial x^۳}\right| \leq C_۱, \qquad \max_{(x,t)\in\Delta_{i,j}} \left|\frac{\partial^۳ u(x,t)}{\partial t^۳}\right| \leq C_۲, \qquad \max_{(x,t)\in\Delta_{i,j}} \left|\frac{\partial^۶ u(x,t)}{\partial x^۳ \partial t^۳}\right| \leq C_۳. \tag{۲.۴}$$

از طرف دیگر، داریم

$$\left|\prod_{l=i}^{i+۲}(x - lh_۱)\right| \leq \frac{۲\sqrt{۳}}{۹} h_۱^۳, \qquad \left|\prod_{m=j}^{j+۲}(t - mh_۲)\right| \leq \frac{۲\sqrt{۳}}{۹} h_۲^۳. \tag{۳.۴}$$

با استفاده از (۲.۴) و (۳.۴) در (۱.۴)، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

نتیجه ۲.۴. در حالت خاص، اگر $X = T$ و $h_۱ = h_۲ = h$، و $u_n(x,t)$ تقریب تابع $u(x,t)$ با استفاده از توابع کلاهی مربعی باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$|u(x,t) - u_n(x,t)| = O\left(h^۳\right).$$

ملاحظه ۳.۴. در روش عددی پیشنهادی، لازم است تابع $\overline{f}$ با استفاده از توابع کلاهی مربعی تقریب زده شود. اما در بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مرتبه توزیعی، تابع f و در نتیجه تابع $\overline{f}$ نسبت به متغیر t از همواری کافی برخوردار نیستند. این موضوع مستقیماً بر دقت نهایی روش اثر گذاشته و می‌تواند موجب کاهش محسوس در مرتبه همگرایی مشاهده شده در مثال‌های عددی شود. به بیان دیگر، کاهش احتمالی مرتبه همگرایی در نتایج عددی ناشی از هموار نبودن تابع $\overline{f}$ است.

۵ مثال‌های عددی

در این بخش، با ارائه مثال‌های عددی و بررسی نتایج، دقت و کارایی روش ارزیابی می‌شود. در مثال‌ها $n_۱ = n_۲ = n$ در نظر گرفته می‌شود. روش عددی ارائه شده در محیط نرم‌افزار Mathematica پیاده‌سازی شده و تمام محاسبات با یک رایانه شخصی مجهز به پردازنده Intel Core i7 با ۲٫۵ گیگاهرتز و ۱۶ گیگابایت حافظه RAM انجام شده است. برای ارزیابی دقت، ماکزیمم قدر مطلق خطا و مرتبه همگرایی، به‌ترتیب، با

$$\begin{aligned} E_n &= \max_{۰\leq x,t\leq ۱} |u(x,t) - u_n(x,t)|, \\ CO &= \log_۲\left(\frac{E_n}{E_{۲n}}\right), \end{aligned}$$

محاسبه می‌شوند، به‌طوری‌که، u جواب دقیق مسئله و u_n جواب تقریبی به‌دست آمده است.

مثال ۱.۵. معادله دیفرانسیل مرتبه کسری توزیعی زیر داده شده است [۲۱]:

$$\int_۰^۱ (\Gamma(\frac{۵}{۲} - \alpha) D_t^\alpha u(x,t) d\alpha - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in [۰,۱] \times [۰,۱],$$

که در آن

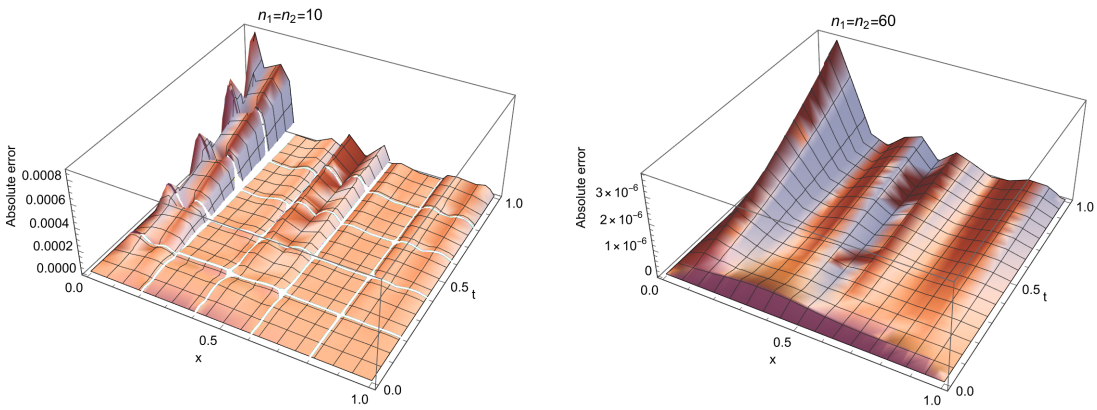
$$f(x,t)=\frac{\sqrt{t}(x-1)^2\left(3\sqrt{\pi}(t-1)(x-1)^2x^2-8t(5x(3x-2)+1)\ln(t)\right)}{\ln(t)},$$

و شرط اولیه و شرایط مرزی به‌صورت $u(x,0)=0$ و $u(0,t)=u(1,t)=0$ داده شده است. جواب تحلیلی این مسئله $u(x,t)=t^{\frac{3}{2}}x^2(1-x)^4$ است.

با به‌کارگیری روش ارائه شده به حل عددی این مسئله پرداختیم. نتایج عددی برای ماکزیمم خطای مطلق، مرتبه همگرایی و زمان انجام محاسبات بر حسب ثانیه به‌ازای مقادیر مختلف n به همراه نتایج حاصل از روش تفاضل متناهی ضمنی [۲۱]، در جدول ۱ گزارش شده است. توابع f و $\overline{f}$ در این مثال روی $[0,1]\times[0,1]$ پیوسته‌اند، ولی $f,\overline{f}\notin C^1([0,1]\times[0,1])$. به همین دلیل، شرایط قضیه ۱.۴ برای این تابع برقرار نیست. این عیب در اکثر مسائل مرتبه توزیعی به‌دلیل وجود جمله $\ln(t)$ در مخرج کسر تابع f برقرار است، که در نتیجه آن، با توجه به وابستگی خطای روش به خطای تقریب تابع $\overline{f}$، نمی‌توان انتظار همگرایی $O(h^3)$ برای روش داشت. با این وجود، نتایج عددی در جدول نشان می‌دهند که روش حاضر از دقت مطلوبی برخوردار است. نمودار توابع خطای مطلق به‌ازای $n=10$ و $n=60$ در شکل ۱ نمایش داده شده است که نشان‌دهنده کاهش خطا با افزایش تعداد توابع پایه‌ای است. همچنین، نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی به‌ازای $n=2$ در شکل ۲ مشاهده می‌شود.

جدول ۱: (مثال ۱.۵) مقایسه نتایج عددی به‌ازای مقادیر مختلف n.

n	روش حاضر			روش [۲۱]
	E_n	CO	CPU time	E_n
۲	9.61×10^{-3}	۱.۱۴	۰.۰۰۰	8.40×10^{-3}
۴	4.36×10^{-3}	۱.۰۹	۰.۰۳۱	2.45×10^{-3}
۸	1.46×10^{-3}	۲.۴۸	۰.۱۴۱	6.36×10^{-4}
۱۶	2.62×10^{-4}	۲.۷۹	۱.۳۹۰	1.62×10^{-4}
۳۲	3.80×10^{-5}	۳.۱۲	۱۸.۰۴۷	–
۶۴	4.38×10^{-6}	–	۳۳۸.۷۱۸	–



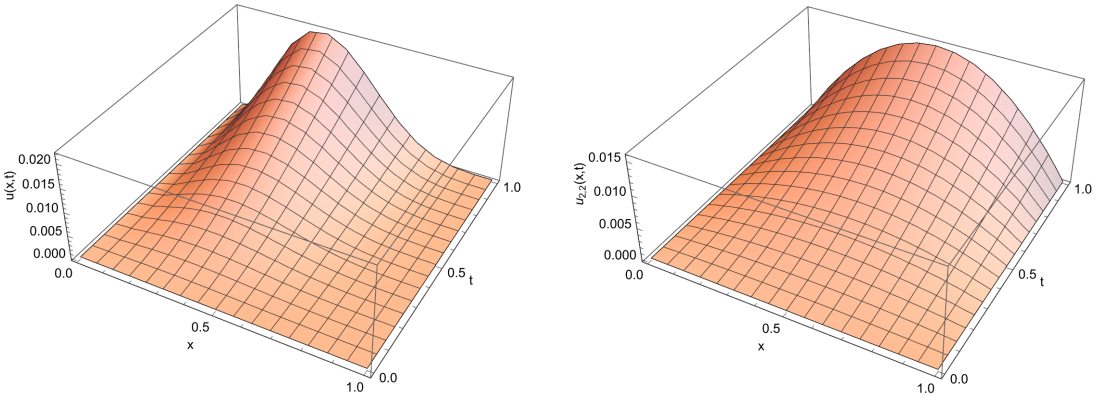
شکل ۱: (مثال ۱.۵) نمودار خطای مطلق با $n=10$ (سمت چپ) و $n=60$ (سمت راست).

مثال **۲.۵**. مسئله انتشار مرتبه کسری توزیعی زیر را در نظر می‌گیریم [۴۴]:

$$\begin{cases}\int_0^1\Gamma(3-\alpha)D_t^{\alpha}u(x,t)d\alpha-u_{xx}(x,t)=f(x,t), & 0<x<1, \quad 0<t<1,\\ u(x,0)=0, \qquad u(0,t)=t^2, \qquad u(1,t)=0,\end{cases}$$

به‌طوری که،

$$f(x,t)=\frac{2t(t-1)(1-x)\cos x}{\ln t}-2t^2\sin x+t^2(1-x)\cos x,$$

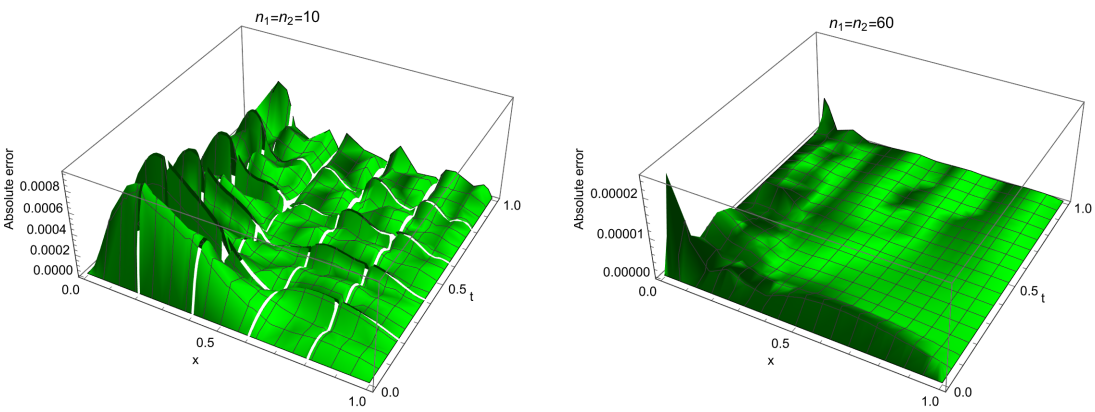


شکل ۲: (مثال ۱.۵) نمودار جواب دقیق (چپ) و جواب تقریبی به‌ازای $n = ۲$ (راست).

و جواب تحلیلی این مسئله $u(x,t) = t^{۲}(۱ - x)\cos x$ است. با پیاده‌سازی روش پیشنهادی روی این مسئله، نتایج عددی در جدول ۲ و شکل‌های ۳، ۴ و ۵ گزارش شده است. نتایج عددی به‌ازای مقادیر مختلف n در جدول ۲ قابل مشاهده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد توابع پایه‌ای خطا کاهش می‌یابد. همچنین، نمودار قدرمطلق خطا به‌ازای $n = ۱۰$ و $n = ۶۰$ در شکل ۳ رسم شده است که نشان‌دهند افزایش دقت در صورت افزایش تعداد توابع پایه‌ای است. به علاوه، با بررسی این نمودارها می‌توان دریافت که ماکزیمم خطا در نقاط مرزی $(t, ۰)$ و $(x, ۰)$ رخ می‌دهد که با توجه به شرط اولیه و شرایط مرزی، جواب دقیق در این نقاط در دسترس است. برای نمونه، در شکل ۴ به وضوح دیده می‌شود که به‌ازای $n = ۶۰$، خطا در اکثر نقاط از ۳×۱۰^{-۶} کمتر است. در آخر، شکل ۵ نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی حاصل از پیاده‌سازی روش به‌ازای $n = ۲$ را نمایش می‌دهد.

جدول ۲: (مثال ۲.۵) نتایج عددی به‌ازای مقادیر مختلف n.

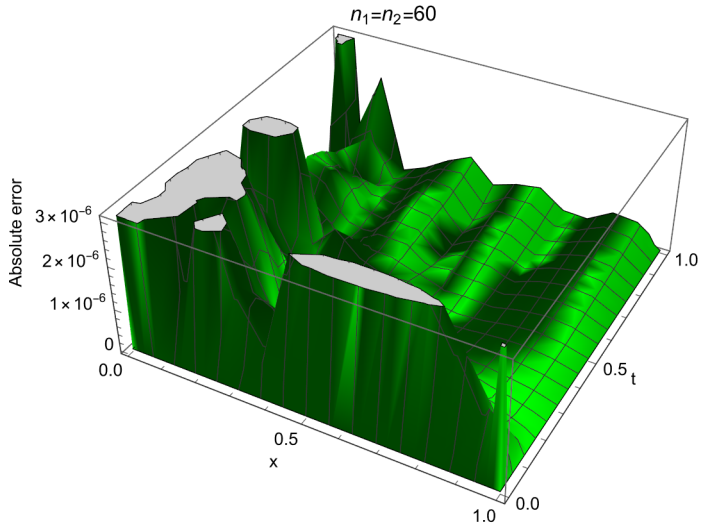
CPU time	CO	E_n	n
۰٫۰۰۰	۲٫۲۶	$۲٫۷۱ \times ۱۰^{-۲}$	۲
۰٫۰۱۵	۱٫۲۸	$۵٫۶۵ \times ۱۰^{-۳}$	۴
۰٫۱۲۵	۲٫۰۳	$۱٫۵۷ \times ۱۰^{-۳}$	۸
۱٫۵۴۷	۱٫۲۴	$۳٫۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	۱۶
۱۸٫۷۳۵	۰٫۷۱	$۱٫۶۳ \times ۱۰^{-۴}$	۳۲
۳۵۵٫۲۸۱	–	$۹٫۹۶ \times ۱۰^{-۵}$	۶۴



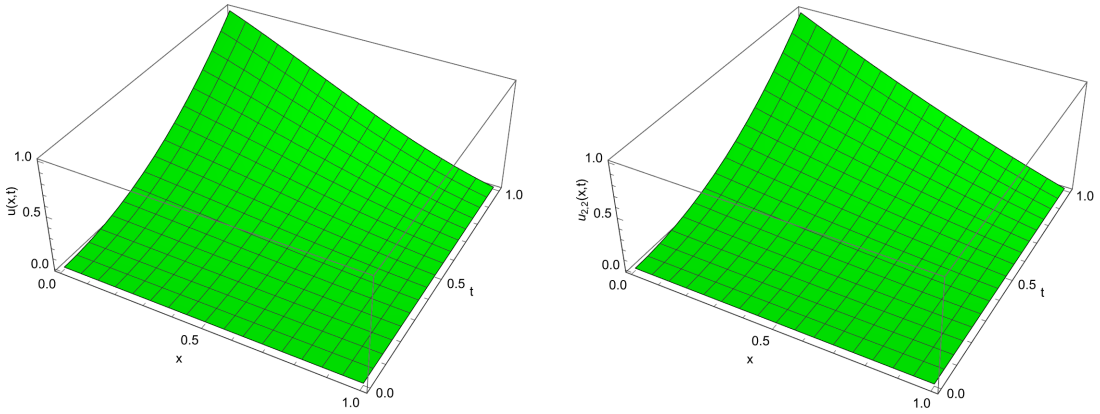
شکل ۳: (مثال ۲.۵) نمودار خطای مطلق با $n = ۱۰$ (چپ) و $n = ۶۰$ (راست).

مثال **۳.۵**. مسئله انتشار مرتبه توزیعی زیر را در نظر می‌گیریم [۴۰]:

$$\begin{cases} \int_{۰}^{۱} \Gamma(\frac{۷}{۲} - \alpha) D_t^{\alpha} u(x,t) d\alpha - u_{xx}(x,t) = f(x,t), & ۰ < x < ۱, \quad ۰ < t < ۱, \\ u(x,۰) = ۰, \qquad u(۰,t) = u(۱,t) = ۰, \end{cases}$$



شکل ۴: (مثال ۲.۵) برشی از نمودار خطای مطلق به‌ازای $n = ۶۰$.



شکل ۵: (مثال ۲.۵) نمودار جواب دقیق (چپ) و جواب تقریبی به‌ازای $n = ۲$ (راست).

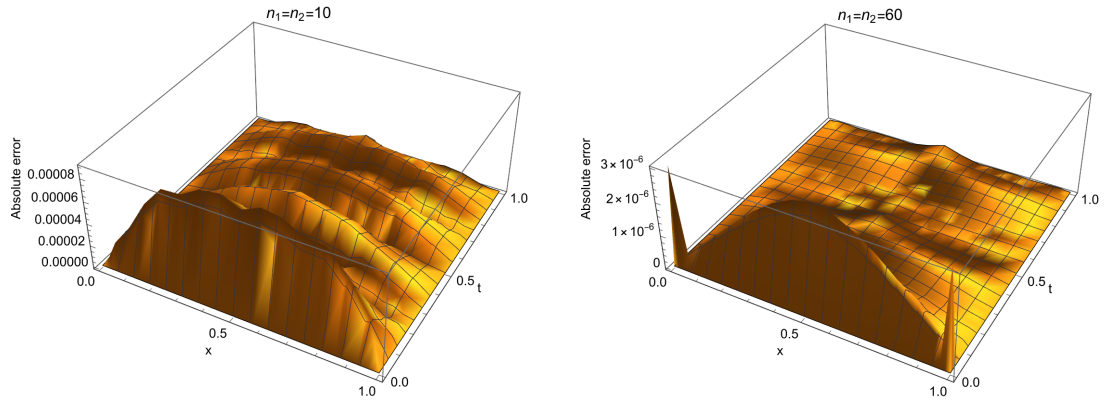
به‌طوری‌که،

$$f(x,t) = \frac{۱۵\sqrt{\pi}t^{۳/۲}(t-۱)x(x-۱)}{۸\ln t} - ۲t^{۵/۲}.$$

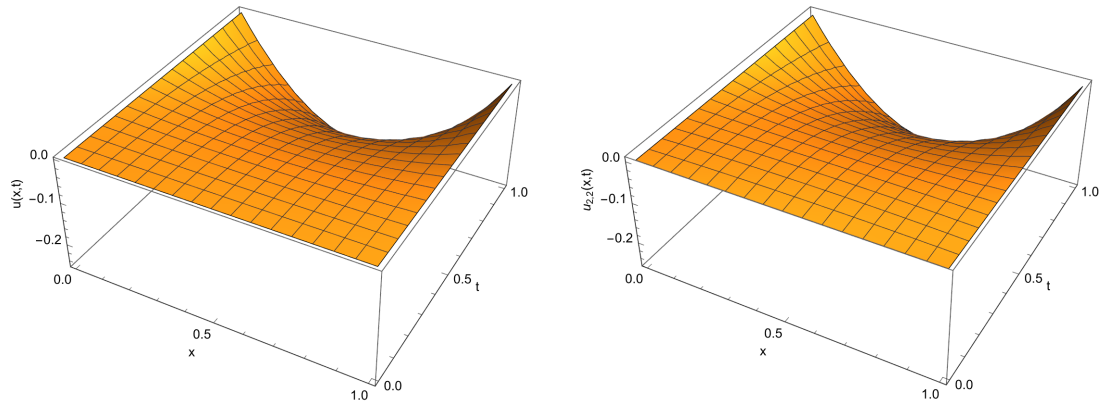
این مسئله دارای جواب تحلیلی $u(x,t) = t^{۵/۲}(x^۲ - x)$ است. با در نظر گرفتن مقادیر مختلف n، نتایج عددی در جدول ۳ و شکل‌های ۶ و ۷ قابل مشاهده است. به‌راحتی می‌توان ملاحظه کرد که با افزایش تعداد توابع پایه‌ای دقت روش بهبود می‌یابد.

جدول ۳: (مثال ۳.۵) نتایج عددی به‌ازای مقادیر مختلف n.

CPU time	CO	E_n	n
۰٫۰۱۵	۱٫۸۵	$۱٫۰۱ \times ۱۰^{-۲}$	۲
۰٫۰۱۶	۲٫۰۱	$۲٫۸۰ \times ۱۰^{-۳}$	۴
۰٫۲۱۹	۱٫۸۳	$۳٫۷۴ \times ۱۰^{-۴}$	۸
۱٫۴۳۸	۰٫۳۵	$۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۴}$	۱۶
۱۸٫۱۷۱	۰٫۸۴	$۸٫۲۶ \times ۱۰^{-۵}$	۳۲
۳۶۸٫۱۱۰	–	$۴٫۶۱ \times ۱۰^{-۵}$	۶۴



شکل ۶: (مثال ۳.۵) نمودار خطای مطلق با $n = ۱۰$ (سمت چپ) و $n = ۶۰$ (سمت راست).



شکل ۷: (مثال ۳.۵) نمودار جواب دقیق (چپ) و جواب تقریبی به‌ازای $n = ۲$ (راست).

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل انتشار مرتبه توزیعی معرفی شده است. روش پیشنهادی مبتنی بر توابع پایه‌ای کلاهی مربعی بوده و این توابع به همراه قاعده انتگرال‌گیری گاوس–لژاندر به‌عنوان ابزارهای موثر برای تبدیل مسئله به دستگاهی از معادلات

جبری استفاده شده‌اند. لازم به ذکر است، با توجه به خطی بودن معادله، دستگاه حاصل نیز یک دستگاه معادلات جبری خطی است که به سادگی قابل حل است. با پیاده‌سازی روش روی سه مثال و ارائه نتایج با در نظر گرفتن تعداد توابع پایه‌ای متفاوت، همگرایی و دقت بالای روش نشان داده شد. با توجه به شکل‌های ۲، ۵ و ۷ و با مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی حاصل از به‌کارگیری کمترین تعداد توابع پایه‌ای، می‌توان دریافت که روش معرفی شده توانایی به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی مطلوب را حتی با تعداد کمی از توابع پایه‌ای دارا است. علی‌رغم نشان دادن مرتبه همگرایی $O(h^{۳})$ برای تقریب یک تابع به اندازه کافی هموار با استفاده از توابع کلاهی مربعی، نتایج عددی نشان می‌دهند که به‌دلیل وجود تابع منبع ناهموار در $t = ۰$ در اکثر مسائل کسری مرتبه توزیعی، روش فاقد مرتبه همگرایی $O(h^{۳})$ است. در آینده، تلاش خواهد شد که از این روش برای حل دسته‌های دیگری از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه توزیعی از جمله معادله موج استفاده شود. تعمیم روش برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه توزیعی غیرخطی نیز در ادامه کار مورد توجه قرار خواهد گرفت. در پایان، یادآور می‌شویم که هرچند چارچوب پیشنهادی به‌صورت اصولی قابل گسترش به مسائل دوبعدی و سه‌بعدی با مشتقات کسری مرتبه توزیعی است، اما افزایش ابعاد موجب تشکیل دستگاه‌های جبری بسیار بزرگ می‌شود و حل کارآمد آنها نیازمند توان محاسباتی بالاتر و بهره‌گیری از زیرساخت‌های محاسباتی پیشرفته است.

فهرست منابع

[1] Abbaszadeh, M., Salec, A.B. and Jebur, A.S., 2023. Integrated radial basis function technique to simulate the nonlinear system of time fractional distributed-order diffusion equation with graded time-mesh discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 156*, pp.57–69. doi:10.1016/j.enganabound.2023.05.049

[2] Abdelkawy, M.A., 2020. An improved collocation technique for distributed-order fractional partial differential equations. *Rom. Rep. Phys*, 72, p.104. doi:10.1016/j.apnum.2019.05.023

[3] Abdelkawy, M.A. and Al-Shomrani, M.M., 2022. Spectral solutions for diffusion equations of Riesz distributed-order space-fractional. *Alexandria Engineering Journal, 61*(2), pp.1045–1054. doi:10.1016/j.aej.2021.07.023

[4] Abd-Elhameed, W.M. and Ahmed, H.M., 2024. Spectral solutions for the time-fractional heat differential equation through a novel unified sequence of Chebyshev polynomials. *Aims Math.*, 9(1), pp.2137–2166. doi:10.3934/math.2024107

[5] Al-Refai, M. and Luchko, Y., 2016. Analysis of fractional diffusion equations of distributed order: Maximum principles and their applications. *Analysis, 36*(2), pp.123–133. doi:10.1515/anly-2015-5011

[6] Ansari, A., Derakhshan, M.H. and Askari, H., 2022. Distributed order fractional diffusion equation with fractional Laplacian in axisymmetric cylindrical configuration. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 113*, p.106590. doi:10.1016/j.cnsns.2022.106590

[7] Atanackovic, T.M., Pilipovic, S. and Zorica, D., 2009. Existence and calculation of the solution to the time distributed order diffusion equation. *Physica Scripta, 2009*(T136), p.014012. doi:10.1088/0031-8949/2009/T136/01

[8] Bagley, R.L. and Torvik, P.J., 2000. On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations-Part II. *International Journal of Applied Mathematics, 2*(8), pp.965–988.

[9] Beghin, L., Mainardi, F. and Garrappa, R. eds., 2021. *Nonlocal and fractional operators*. Cham, Switzerland: Springer. doi:10.1007/978-3-030-69236-0

[10] Burden, R. and Douglas Faires, J., 2011. *Numerical Analysis*. Boston, MA: Cengage Learning.

[11] Caputo, M., 2001. Distributed order differential equations modelling dielectric induction and diffusion. *Fractional Calculus and Applied Analysis, 4*(4), pp.421–442.

[12] Caputo, M., 1995. Mean fractional-order-derivatives differential equations and filters. *Annali dell'Universita di Ferrara, 41*, pp. 73–84.

[13] Caputo, M. and Fabrizio, M., 2015. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in fractional differentiation & applications, 1*(2), pp.73–85. doi:10.12785/pfda/010201

[14] Caputo, M. and Fabrizio, M., 2016. Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels. *Progress in Fractional Differentiation & Applications, 2*(1), pp.1–11. doi:10.18576/pfda/020101

[15] Derakhshan, M.H. and Aminataei, A., 2022. A numerical method for finding solution of the distributed-order time-fractional forced Korteweg–de Vries equation including the Caputo fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45*(5), pp.3144–3165. doi:10.1002/mma.7981

[16] Derakhshan, M.H., Rezaei, H. and Marasi, H.R., 2023. An efficient numerical method for the distributed order time-fractional diffusion equation with error analysis and stability. *Mathematics and Computers in Simulation, 214*, pp.315–333. doi:10.1016/j.matcom.2023.07.0

[17] Du, R. and Tang, J., 2025. Efficient numerical methods for time-fractional diffusion equations with Caputo-Type Erdélyi–Kober operators. *Fractal and Fractional, 9*(8), p.486. doi:10.3390/fractalfract9080486

[18] Eftekhari, T., Rashidinia, J. and Maleknejad, K., 2021. Existence, uniqueness, and approximate solutions for the general nonlinear distributed-order fractional differential equations in a Banach space. *Advances in Difference Equations, 2021*(1), p.461. doi:10.1186/s13662-021-03617-0

[19] EEngström, C., Giani, S. and Grubišić, L., 2023. Numerical solution of distributed-order time-fractional diffusion-wave equations using Laplace transforms. *Journal of computational and applied mathematics, 425*, p.115035. doi:10.1016/j.cam.2022.115035

[20] Ford, N.J. and Morgado, M.L., 2012. Distributed order equations as boundary value problems. *Computers & Mathematics with Applications, 64*(10), pp.2973–2981. doi:10.1016/j.camwa.2012.01.053

[21] Ford, N.J., Morgado, M.L., and Rebelo, M., 2015. An implicit finite difference approximation for the solution of the diffusion equation with distributed order in time, *Electron, Trans. Numer. Anal.*, 44, pp.289–305.

[22] Gasca, M. and Sauer, T., 2000. On the history of multivariate polynomial interpolation, *J. Comput. Appl. Math.*, 122, pp.23–35. doi:10.1016/S0377-0427(00)00353-8

[23] Guo, S., Mei, L., Zhang, Z. and Jiang, Y., 2018. Finite difference/spectral-Galerkin method for a two-dimensional distributed-order time–space fractional reaction–diffusion equation. *Applied Mathematics Letters, 85*, pp.157–163. doi: 10.1016/j.aml.2018.06.005

[24] Habibirad, A., Baghani, O., Hesameddini, E., Heydari, M.H. and Azin, H., 2024. A meshless method based on the modified moving Kriging interpolation for numerical solution of space-fractional diffusion equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 163*, pp.1–11. doi:10.1016/j.enganabound.2024.02.011

[25] Heydari, M.H., Razzaghi, M. and Baleanu, D., 2023. A numerical method based on the piecewise Jacobi functions for distributed-order fractional Schrödinger equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 116*, p.106873. doi:10.1016/j.cnsns.2022.106873

[26] Huang, Y., Rad, N.T., Skandari, M.H.N. and Tohidi, E., 2025. A spectral collocation scheme for solving nonlinear delay distributed-order fractional equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 456*, p.116227. doi:10.1016/j.cam.2024.116227

[27] Kochubei, A.N., 2008. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340*(1), pp.252–281. doi:10.1016/j.jmaa.2007.08.024

[28] Kumar, Y., Srivastava, N., Singh, A. and Singh, V.K., 2023. Wavelets based computational algorithms for multidimensional distributed order fractional differential equations with nonlinear source term. *Computers & Mathematics with Applications, 132*, pp.73–103. doi:10.1016/j.camwa.2022.12.001

[29] Li, Y., Sheng, H. and Chen, Y.Q., 2011. On distributed order integrator/differentiator. *Signal Processing, 91*(5), pp.1079–1084. doi:10.1016/j.sigpro.2010.10.005

[30] Liu, Y., Fan, E., Yin, B. and Li, H., 2020. Fast algorithm based on the novel approximation formula for the Caputo-Fabrizio fractional derivative. *AIMS Mathematics, 5*(3), p.1729. doi:10.3934/math.2020117

[31] Luchko, Y., 2023. General fractional integrals and derivatives and their applications. *Physica D: Nonlinear Phenomena, 455*, p.133906. doi:10.1016/j.physd.2023.133906

[32] Mashayekhi, S. and Razzaghi, M., 2016. Numerical solution of distributed order fractional differential equations by hybrid functions. *Journal of computational physics, 315*, pp.169–181. doi:10.1016/j.jcp.2016.01.041

[33] Masti, I. and Sayevand, K., 2024. On collocation-Galerkin method and fractional B-spline functions for a class of stochastic fractional integro-differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation, 216*, pp.263–287. doi:10.1016/j.matcom.2023.09.013

[34] Maurya, R.K., Li, D., Singh, A.P. and Singh, V.K., 2024. Numerical algorithm for a general fractional diffusion equation. *Mathematics and Computers in Simulation, 223*, pp.405–432. doi:10.1016/j.matcom.2024.04.018

[35] Mesgarani, H., Esmaeelzade Aghdam, Y. and Tavakoli, H., 2021. Numerical simulation to solve two-dimensional temporal-space fractional Bloch–Torrey equation taken of the spin magnetic moment diffusion. *International Journal of Applied and Computational Mathematics, 7*(3), p.94. doi:10.1007/s40819-021-01024-3

[36] Mu'lla, M.A.M., 2020. Fractional Calculus, Fractional Differential Equations and Applications. *Open Access Library Journal, 7*, pp.1–7. doi:10.4236/oalib.1106244

[37] Nemati, S. and Lima, P.M., 2018. Numerical solution of nonlinear fractional integro-differential equations with weakly singular kernels via a modification of hat functions. *Applied Mathematics and Computation, 327*, pp.79–92. doi:10.1016/j.amc.2018.01.030

[38] Noor, S., Albalawi, W., Shah, R., Al-Sawalha, M.M., Ismaeel, S.M. and El-Tantawy, S.A., 2024. On the approximations to fractional nonlinear damped Burger's-type equations that arise in fluids and plasmas using Aboodh residual power series and Aboodh transform iteration methods. *Frontiers in Physics, 12*, p.1374481. doi:10.3389/fphy.2024.1374481

[39] Pant, R., Arora, G. and Emadifar, H., 2024. Elzaki residual power series method to solve fractional diffusion equation. *Plos one, 19*(3), p.e0298064. doi:10.1371/journal.pone.0298064

[40] Pimenov, V.G., Hendy, A.S. and De Staelen, R.H., 2017. On a class of non-linear delay distributed order fractional diffusion equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 318, pp.433–443. doi:10.1016/j.cam.2016.02.039

[41] Pourbabaee, M. and Saadatmandi, A., 2022. A new operational matrix based on Muntz-Legendre polynomials for solving distributed order fractional differential equations. *Math. Comput. Simul.*, 194, pp.210–235. doi:10.1016/j.matcom.2021.11.023

[42] Ramezani, M., and Mokhtari, R., 2025. Numerical solution of distributed-order fractional diffusion equations using a high-order temporal scheme, *Commun. Appl. Math. Comput.*, (2025). doi:10.1007/s42967-025-00501-6

[43] Saadatmandi, A. and Dehghan, M., 2011. A Legendre collocation method for fractional integro-differential equations. *Journal of Vibration and Control, 17*(13), pp.2050–2058. doi:10.1177/1077546310395977

[44] Sabermahani, S. and Ordokhani, Y., 2023. An optimum solution for multi-dimensional distributed-order fractional differential equations. *Comput. Methods Differ. Equ.*, 11, pp.548–563. doi:10.22034/cmde.2022.54288.2269

[45] Safdari, H., Mesgarani, H., Javidi, M. and Esmaeelzade Aghdam, Y., 2020. Convergence analysis of the space fractional-order diffusion equation based on the compact finite difference scheme, *Comp. Appl. Math.*, 39, p.62. doi:10.1007/s40314-020-1078-z

[46] Sun, H., Chen, W., Li, C. and Chen, Y., 2010. Fractional differential models for anomalous diffusion. *Physica A, 389*, pp.2719–2724. doi:10.1016/j.physa.2010.02.030

[47] Tuan, N.H., Aghdam, Y.E., Jafari, H. and Mesgarani, H., 2021. A novel numerical manner for two-dimensional space fractional diffusion equation arising in transport phenomena, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 37(2), pp.1397–1406. doi:10.1002/num.22586

[48] Xu, Y., Zhang, Y. and Zhao, J., 2019. Error analysis of the Legendre-Gauss collocation methods for the nonlinear distributed-order fractional differential equation. *Appl. Numer. Math.*, 142, pp.122–138. doi:10.1016/j.apnum.2019.03.005

[49] Zhou, Y., 2024. *Basic Theory of Fractional Differential Equations*. World scientific.

Numerical solution of distributed-order fractional diffusion equations using quadratic hat functions

Afrooz Abbasi[(1)] and Somayeh Nemati[(1)] [2]

[(1)] Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinian

Received: 5 June 2025 Accepted: 26 May 2026

Abstract: In this research, quadratic hat functions and their properties are used to solve a class of distributed-order fractional diffusion equations. The fractional derivative is considered in the Caputo sense. To obtain the numerical solution, after applying the second-order spatial integral to both sides of the equation and employing the Gauss-Legendre quadrature rule, the problem is transformed into a multi-term time-fractional integro-differential equation. Subsequently, by introducing an approximation of the first-order time derivative of the unknown function, derivatives of various orders of the function are approximated using the Riemann-Liouville operational matrix and the properties of quadratic hat functions. By substituting these approximations and applying the initial and boundary conditions, a system of algebraic equations is obtained. Then, the approximation error is examined. Finally, numerical examples are provided to evaluate the efficiency and accuracy of the proposed method.

Keywords: Distributed-order diffusion equation, Quadratic hat functions, Caputo derivative, Riemann-Liouville integral, Operational matrix.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (A. Abbasi) a.abbasi05@umail.umz.ac.ir, (S. Nemati) s.nemati@umz.ac.ir